Aufgabe: Die Achsen zweier Zylinder mit Radien R und r, $R > r$, schneiden sich unter dem Winkel α. Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Abwicklung der Schnittkurve auf dem grösseren Zylinder in die Ebene.

Lösung. Wir wählen einen Durchstosspunkt der Achse des kleinen Zylinders durch den Mantel des grossen Zylinders als Koordinatenursprung eines Koordinatensystems auf dem Mantel des grossen Zylinders, und die den Nullpunkt enthaltende Mantellinie als die x-Achse. Wir entfernen den Teil des Mantels des grossen Zylinders, der weniger als 90° von der gegenüberliegenden Mantellinie des grossen Zylinders entfernt ist, damit erreichen wir, dass alle Mantellinien des kleinen Zylinders nur genau einen Durchstosspunkt haben.

Zwei Mantellinien des kleinen Zylinders liegen in der gleichen Ebene wie die beiden Zylinderachsen. Die Mantellinien auf dem kleinen Zylinder können durch den Winkel φ parametrisiert werden. Dem Winkel $\varphi = 0$ entspricht jene Mantellinie, für die der ausserhalb der beiden Zylinder gemessene Winkel zur x-Achse $\pi - \alpha$ ist.

Wäre das Koordinatensystem in der Tangentialebene, die in der x-Achse den grossen Zylinder berührt, wäre der Druchstosspunkt der Mantellinie zum Parameter φ

$$\left(\frac{r\cos\varphi}{\sin\alpha}, r\sin\varphi\right).$$

Die Auslenkung $r\sin\varphi$ entspricht einem um die Zylinderachse gemessenen Winkel ϑ, für den gilt

$$R\sin\vartheta = r\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \sin\vartheta = \frac{r}{R}\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \vartheta = \arcsin\frac{r}{R}\sin\varphi$$

$$\cos\vartheta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}\sin^2\varphi}$$

Der Durchstosspunkt durch den Zylinder befindet sich im Abstand $R(1-\cos\vartheta)$ von der Tangentialebene, dadurch wird er in x-Richtung um den Betrag

$$R(1-\cos\vartheta)\cot\alpha$$

verschoben. Die y-Koordinate gemessen entlang eines Breitenkreises ist $R\vartheta$, daraus kann man jetzt die gesuchte Parameterdarstellung zusammensetzen:

$$\varphi \mapsto \left(\frac{r\cos\varphi}{\sin\alpha} + \left(R - \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\varphi}\right)\cot\alpha, R\arcsin\frac{r}{R}\sin\varphi\right)$$

□